View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk brought to you by CORE

Математика и математическое моделирование. 2019.
№ 05. С. 1 – 14.

DOI: **10.24108/mathm.0519.0000197**

CC BY

© В.О. Лукащук, Л.О. Гаврюшина

Математика и Математическое моделирование

Сетевое научное издание

http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 517.95

Приближенные симметрии и законы сохранения дробно-дифференциального обобщения уравнения Бюргерса

Лукащук В.О.[1,*], Гаврюшина Л.О.[1]

[1]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

[*]voluks@gmail.com

В работе проводится исследование симметрийных свойств нелинейного приближенного уравнения в частных производных, полученного путём разложения дробной производной Римана–Лиувилля в ряд по малому параметру, выделенному из порядка дробного дифференцирования в дробно-дифференциальном обобщении уравнения Бюргерса. Для приближенного уравнения проверяется выполнение условия нелинейной самосопряженности, а также строятся приближенные законы сохранения и некоторые инвариантные решения.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное обобщение уравнение Бюргерса, приближенные симметрии, приближенные законы сохранения

Представлена в редакцию: 04.09.2019, исправлена 19.09.2019

* *Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.*

Введение

Уравнение Бюргерса является одним из классических уравнений математической физики. Впервые оно было предложено И. Бюргерсом для описания одномерной турбулентности [1]. В дальнейшем было показано, что это уравнение возникает при рассмотрении довольно широкого класса задач. Например, в гидродинамике оно возникает при моделировании распространения колебаний в вязкой среде [2], в нелинейной акустике [3, 4] оно описывает движение плоских волн небольшой амплитуды и нелинейных волн в газах.

В последние годы наблюдается значительный рост интереса к исследованию математических моделей с учетом эффекта памяти среды. Если функция памяти имеет степенную асимптотику при больших временах, то соответствующая математическая модель может быть представлена в виде дробно-дифференциального уравнения [5, 6]. Если влияние памяти относительно мало (то есть порядок дробного дифференцирования близок к целому числу), то дробно-дифференциальное уравнение может быть приближено уравнением с малым параметром. Исследованию таких уравнений посвящены, например, работы [7, 8].

Эффективным аппаратом для исследования свойств и решения уравнений с дробными производными является групповой анализ. Его методы (см., например, [9,10]), впервые предложенные известным норвежским математиком С. Ли, и в настоящее время являются актуальными. Инфинитезимальный подход к изучению симметрийных свойств и построению группы точечных преобразований, развитый в работах [11, 12, 13], позволяет находить как точные, так и приближенные симметрии и инвариантные решения для дробно-дифференциальных уравнений.

В работе рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнения Бюргерса

$$D_t^{\alpha}u = u_{xx} + f(u)u_x, u = u(x,t), \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

с дробной производной Римана-Лиувилля по времени [14]

$$D_t^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(\tau,x)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \tag{2}$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ – гамма-функция. Функция $f(u)$ в уравнении (1) – произвольная функция, отличная от константы.

При $\alpha = 1 - \varepsilon$ для дробной производной (2) справедливо разложение [13]:

$$D_t^{\alpha}u \approx u_t + \varepsilon\left[(\ln(t) + \gamma - 1)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!}D_t^{s+1}u\right],$$

где γ – постоянная Эйлера. В данном разложении $0 < \varepsilon \ll 1$ является малым параметром. Здесь и далее равенство $h(x) \approx g(x)$ означает $h(x) - g(x) = o(\varepsilon)$.

Таким образом, из исходного уравнения (1) получается уравнение с малым параметром

$$u_t + \varepsilon\left[(\ln(t) + \gamma - 1)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!}D_t^{s+1}u\right] \approx u_{xx} + f(u)u_x. \tag{3}$$

Уравнение (3) может рассматриваться, как нелокальное возмущение обобщенного уравнения Бюргерса

$$u_t = f(u)u_x + u_{xx}\,, \tag{4}$$

в которое оно переходит при $\varepsilon = 0$.

В данной работе для уравнения (3) ищется допускаемая им группа приближенных точечных преобразований, проверяется выполнение для него условия нелинейной самосопряженности, строятся приближенные законы сохранения и некоторые инвариантные решения.

1. Допускаемая группа преобразований

Следуя работе [15], будем искать приближенно допускаемую группу преобразований для уравнения (3) с оператором

$$X \approx \mathrm{X}_{(0)} + \varepsilon X_{(1)} = \left(\xi^1_{(0)} + \varepsilon\xi^1_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\xi^2_{(0)} + \varepsilon\xi^2_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\eta_{(0)} + \varepsilon\eta_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5}$$

Координаты $\xi^1_{(j)}, \xi^2_{(j)}, \eta_{(j)}$ $(j = 0, 1)$ данного оператора являются функциями переменных t, x, u. Оператор $\mathrm{X}_{(0)}$ в (5) является оператором невозмущенного уравнения (4). Групповая классификация уравнения (4) хорошо известна, (см., например, [9, 10]), для него справедливо

Утверждение 1. *В зависимости от вида функции $f(u)$ уравнение (4) допускает двух-, трех- или пятипараметрическую группу Ли точечных преобразований. А именно,*

если $f(u)$ – произвольного вида, то уравнение (4) допускает двухпараметрическую группу Ли G с операторами

$$G: X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

если $f(u) = u^k, k \neq 0,1,$ то группа Ли G для уравнения (4) расширяется до трёхпараметрической оператором

$$X_3 = 2kt\frac{\partial}{\partial t} + kx\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

если $f(u) = u$, то группа Ли G для уравнения (4) расширяется до пятипараметрической операторами

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, оператор $\mathrm{X}_{(0)}$ из (5) в зависимости от вида функции $f(u)$ есть линейная комбинация операторов $X_1, \dots, X_5$ из утверждения 1.

Рассмотрим случай, когда уравнение (4) допускает самую богатую группу симметрий, то есть функция $f(u)$ является линейной. Из утверждения 1 следует, что функции $\xi^1_{(0)}, \xi^2_{(0)}, \eta_{(0)}$ в (5) примут вид

$$\xi^1_{(0)} = C_1 + 2tC_4 + t^2C_5, \xi^2_{(0)} = C_2 + tC_3 + xC_4 + txC_5,$$
$$\eta_{(0)} = -C_3 - uC_4 - (x + tu)C_5,$$

где $C_1, \dots, C_5 = Const$. Тогда второе продолжение оператора (5) будет иметь вид

$$\tilde{X} \approx \left(\xi^1_{(0)} + \varepsilon\xi^1_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\xi^2_{(0)} + \varepsilon\xi^2_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\eta_{(0)} + \varepsilon\eta_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial u} +$$
$$+\left(\varsigma^1_{(0)} + \varepsilon\varsigma^1_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial u_t} + \left(\varsigma^2_{(0)} + \varepsilon\varsigma^2_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial u_x} + \left(\varsigma^{22}_{(0)} + \varepsilon\varsigma^{22}_{(1)}\right)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \sum_{s=1}^{\infty}\varsigma^{s+1}_{(0)}\frac{\partial}{\partial(u_t^{s+1})},$$

где

$$\varsigma^1_{(0)} = -3u_tC_4 - 3tu_tC_5 - u_xC_3 - xu_xC_5 - uC_5,$$
$$\varsigma^2_{(0)} = -2u_xC_4 - 2tu_xC_5 - C_5, \varsigma^{22}_{(0)} = -3u_{xx}C_4 - 3u_{xx}tC_5,$$
$$\varsigma^{s+1}_{(0)} = -(2s+3)C_4D_t^{s+1}u - (2s+3)tC_5D_t^{s+1}u - (s+1)^2C_5D_t^su -$$
$$-(s+1)C_3D_t^su_x - (s+1)xC_5D_t^su_x,$$
$$\varsigma^1_{(1)} = \eta_{(1)t} + \eta_{(1)u}u_t - u_t\left(\xi^1_{(1)t} + u_t\xi^1_{(1)u}\right) - u_x\left(\xi^2_{(1)t} + u_t\xi^2_{(1)u}\right),$$
$$\varsigma^2_{(1)} = \eta_{(1)x} + \eta_{(1)u}u_x - u_t\left(\xi^1_{(1)x} + u_x\xi^1_{(1)u}\right) - u_x\left(\xi^2_{(1)x} + u_x\xi^2_{(1)u}\right),$$

$$\varsigma^{22}_{(1)} = \eta_{(1)xx} + u_t(\eta_{(1)u} - 2\xi^2_{(1)x} - \xi^1_{(1)xx}) + u_x(2\eta_{(1)xu} - \xi^2_{(1)xx} - u\eta_{(1)u} + 2u\xi^2_{(1)x}) -$$
$$-2u_{tx}\xi^1_{(1)x} - u_t^2\xi^1_{(1)u} + u_x^2(\eta_{(1)uu} - 2\xi^2_{(1)xu} + 3u\xi^2_{(1)u}) - u_xu_t(2\xi^1_{(1)xu} + 3\xi^2_{(1)u} - u\xi^1_{(1)u}) -$$
$$-2u_xu_{tx}\xi^1_{(1)u} - u_tu_x^2\xi^1_{(1)uu} - u_x^3\xi^2_{(1)uu}.$$

Определяющее уравнение запишется как

$$\left\{\varepsilon\xi^1_{(0)}\left[\frac{u_t}{t} - \frac{u}{t^2} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!}D_t^{s+1}u\right] + \left(\eta_{(0)} + \varepsilon\eta_{(1)}\right)\left(\frac{\varepsilon}{t} - fu_x\right) + \right.$$
$$+\left(\varsigma^1_{(0)} + \varepsilon\varsigma^1_{(1)}\right)\left(1 + \varepsilon(\ln(t) + \gamma - 1)\right) - f\left(\varsigma^2_{(0)} + \varepsilon\varsigma^2_{(1)}\right) - \tag{6}$$
$$\left.\left. -\left(\varsigma^{22}_{(0)} + \varepsilon\varsigma^{22}_{(1)}\right) + \varepsilon\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!}\varsigma^{s+1}_{(0)}\right\}\right|_{(3)} = 0.$$

Все производные u_{xx} в (6) заменяются в силу уравнения (3). Расщепляя полученное уравнение по степеням ε, при $\varepsilon = 0$ имеем тождественный ноль в силу утверждения 1. При ε^1 определяющее уравнение расщепляем по всем производным $u_t, u_x, {u_x}^2, u_{tx}, u_tu_x, u_xu_{tx}, u_t{u_x}^2, {u_x}^3, D_t^{s+1}u, D_t^s u_x$, входящим в уравнение. В итоге получаем систему на неизвестные функции $\xi^1_{(1)}, \xi^2_{(1)}, \eta_{(1)}$:

$$\frac{C_1}{t} + 2C_4 + tC_5 - \xi^1_t + u\xi^1_{(1)x} + \xi^1_{(1)xx} + 2\xi^2_{(1)x} = 0, \tag{7}$$
$$-\eta_{(1)} - C_3(\ln(t) + \gamma - 1) - \xi^2_{(1)t} - u\xi^1_{(1)u} - 3u\xi^2_{(1)x} - 2\eta_{(1)xu} + \xi^2_{(1)xx} = 0, \tag{8}$$
$$2u\xi^2_{(1)u} - \eta_{(1)uu} + 2\xi^2_{(1)xu} = 0, \tag{9}$$
$$2\xi^1_{(1)x} = 0, 2\xi^1_{(1)u} = 0, \xi^1_{(1)uu} = 0, \xi^2_{(1)uu} = 0, \tag{10}$$
$$-4u\xi^2_{(1)u} + 2\xi^1_{(1)xu} - u\xi^1_{(1)u} = 0, \tag{11}$$
$$-\frac{C_1u}{t^2} - \frac{C_3}{t} - (xuC_5 + uC_5)\cdot(\ln(t) + \gamma - 1) + \eta_{(1)t} - u\eta_{(1)x} - \eta_{(1)xx} = 0, \tag{12}$$
$$C_1\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^{s-1}}{(s+1)!} - C_5\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^{s+1}}{(s+1)!} = 0\,, -C_5\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s(s+1)}{s\cdot s!} = 0, \tag{13}$$
$$-C_3\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s\cdot s!}D_t^s u_x - xC_5\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s\cdot s!}D_t^s u_x = 0. \tag{14}$$

Из уравнений (13), (14) имеем $C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Тогда из уравнений (10), (11) следует

$$\xi^1_{(1)} = \xi^1_{(1)}(t), \xi^2_{(1)} = \xi^2_{(1)}(t,x).$$

Из уравнения (9) получаем, что функция $\eta_{(1)}$ будет линейной по переменной u. Следовательно, расщепляя (12) по u, имеем

$$\eta_{(1)} = (A_1t + A_2)u + A_1x + A_3,$$

где $A_1, A_2, A_3 = Const$. Используя полученную $\eta_{(1)}$ в уравнениях (7) и (8), находим

$$\xi^1_{(1)} = 2C_4t - A_1\mathrm{t}^2 - 2A_2t + A_5, \xi^2_{(1)} = -A_1tx - A_2x - A_3t + A_4,$$

где $A_1, \ldots, A_5 = Const$.

Таким образом, уравнение (3) с линейной функцией $f(u)$ допускает семипараметрическую приближенную группу преобразований с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, X_3 = 2t(1+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = \varepsilon t \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = \varepsilon t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon t x \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon (x + t u) \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_6 = \varepsilon X_1 \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, X_7 = \varepsilon X_3 \equiv 2t\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Аналогичным образом были найдены координаты оператора (5) в случае произвольной и степенной функции $f(u)$ из уравнения (3). В результате доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *В зависимости от вида функции $f(u) \neq Const$ уравнение (3) допускает трех-, пяти- или семипараметрическую группу Ли приближенных точечных преобразований. А именно,*

если $f(u)$ – произвольного вида, то уравнение (3) допускает трёхпараметрическую группу Ли G с операторами

$$G: X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = \varepsilon X_1,$$

если $f(u) = u^k, k \neq 0{,}1,$ то группа Ли G для уравнения (3) расширяется до пятипараметрической операторами

$$X_4 = 2kt(1+\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} + kx \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = \varepsilon X_4,$$

если $f(u) = u$, то группа Ли G для уравнения (3) расширяется до семипараметрической операторами

$$X_4 = 2t(1+\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_5 = \varepsilon t \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial u}, X_6 = \varepsilon t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon t x \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon (x + t u) \frac{\partial}{\partial u}, X_7 = \varepsilon X_4.$$

2. Нелинейная самосопряженность

Невозмущенное обобщенное уравнение Бюргерса не имеет классического лагранжиана. Воспользуемся работами [16], [17] и найдем формальный лагранжиан для уравнения (3) в виде:

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{(0)} + \varepsilon \mathcal{L}_{(1)} \equiv v F_{(0)} + \varepsilon v F_{(1)},$$

где

$$F_{(0)} = u_t - f(u) u_x - u_{xx}, F_{(1)} = (\ln(t) + \gamma - 1) u_t + \frac{u}{t} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!} D_t^{s+1} u,$$

а $v \approx v_{(0)} + \varepsilon\, v_{(1)} -$ новая зависимая переменная. Для определения v запишем приближенно сопряженное к (3) уравнение

$$F^* \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \approx 0,$$

где

$$F^* = v_{(0)} \frac{\partial F_{(0)}}{\partial u} - D_t \left(v_{(0)} \frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_t} \right) - D_x \left(v_{(0)} \frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_x} \right) + D_x^2 \left(v_{(0)} \frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_{xx}} \right) +$$

$$+\varepsilon\left[v_{(0)}\frac{\partial F_{(1)}}{\partial u}-D_t\left(v_{(0)}\frac{\partial F_{(1)}}{\partial u_t}\right)+v_{(1)}\frac{\partial F_{(0)}}{\partial u}-D_t\left(v_{(1)}\frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_t}\right)-D_x\left(v_{(1)}\frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_x}\right)+\right.$$

$$\left.+D_x^2\left(v_{(1)}\frac{\partial F_{(0)}}{\partial u_{xx}}\right)+\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s D_t^s\left(v_{(0)}\frac{\partial F_{(1)}}{\partial u_t^{(s)}}\right)\right],$$

или, после преобразований,

$$F^*=-v_{(0)t}+v_{(0)x}f(u)-v_{(0)xx}+\varepsilon[\,v_{(0)t}(\ln(t)+\gamma-1)-$$

$$-\textstyle\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{(s-1)s!}D_t^s\left(t^{s-1}v_{(0)}\right)-v_{(1)t}+v_{(1)x}f(u)-v_{(1)xx}\,]. \qquad (15)$$

Уравнение (3) будет приближенно нелинейно самосопряженным, если найдутся такие функции $\varphi_{(0)}(t,x,u)$ и $\varphi_{(1)}(t,x,u)$, что выполняется условие (см., например, [17]):

$$\left[F_{(0)}^*+\varepsilon F_{(1)}^*\right]\Big|_{v\approx\varphi_{(0)}(t,x,u)+\varepsilon\varphi_{(1)}(t,x,u)}\approx\lambda_{(0)}F_{(0)}+\varepsilon\left(\lambda_{(0)}F_{(1)}+\lambda_{(1)}F_{(0)}\right), \qquad (16)$$

где $\lambda_{(0)},\lambda_{(1)}$ – неопределенные коэффициенты. Подставляя (15) в (16) и расщепляя последнее по малому параметру ε и независимым переменным, получим решение в виде

$$\lambda_{(0)}=0,\lambda_{(1)}=0,\varphi_{(0)}=K_1,\varphi_{(1)}=K_2,$$

где $K_1,K_2=Const$. Не ограничивая общности, положим $K_1=K_2=1$.

Таким образом, доказано

Утверждение 3. *Приближенное уравнение (3) является приближенно нелинейно самосопряженным с подстановкой $v=1+\varepsilon$.*

3. Приближенные законы сохранения

Согласно [17], для уравнения (3) приближенный закон сохранения имеет вид

$$D_t(C^t)+D_x(C^x)\approx 0,$$

где компоненты сохраняющегося вектора $C^i\approx C_{(0)}^i+\varepsilon C_{(1)}^i, i=t,x,$ определяются по формулам:

$$C_{(0)}^t=W_{(0)}\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_t},C_{(0)}^x=W_{(0)}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_x}-D_x\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_{xx}}\right)\right)+D_x\left(W_{(0)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_{xx}},$$

$$C_{(1)}^t=W_{(1)}\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_t}+W_{(0)}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial u_t}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_t^s\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial(D_t^{s+1}u)}\right)\right)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}D_t^r\left(W_{(0)}\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial(D_t^{r+1}u)}+\sum_{s=r+1}^{\infty}(-1)^{s-r}D_t^{s-r}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial(D_t^{s+1}u)}\right)\right],$$

$$C_{(1)}^x=W_{(1)}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_x}-D_{\mathrm{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_{xx}}\right)\right)+D_x\left(W_{(1)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_{(0)}}{\partial u_{xx}}+$$

$$+W_{(0)}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial u_x}-D_{\mathrm{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial u_{xx}}\right)\right)+D_x\left(W_{(0)}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_{(1)}}{\partial u_{xx}},$$

$$W_{(0)}=\eta_{(0)}-\xi_{(0)}^j u_j,W_{(1)}=\eta_{(1)}-\xi_{(1)}^j u_j,$$

а слагаемые формального лагранжиана с учетом утверждения 3 равны

$$\mathcal{L}_{(0)} = u_t - f(u)u_x - u_{xx},$$
$$\mathcal{L}_{(1)} = (\ln(t)+\gamma)u_t + \frac{u}{t} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!}D_t^{s+1}u + u_t - f(u)u_x - u_{xx}.$$

Снова рассмотрим уравнение (3) с самой широкой допускаемой группой приближенных преобразований, то есть случай $f(u) = u$. Для оператора X_1 имеем $W_{(0)} = -u_x, W_{(1)} = 0$ и компоненты сохраняющегося вектора в силу уравнения (3) равны
$$C^x = 0, C^t = 0.$$
Следовательно, приближенный закон сохранения является в этом случае тривиальным. Показано, что для операторов X_2 и X_3 соответствующие приближенные законы сохранения также оказываются тривиальными.

Для оператора X_4 имеем $W_{(0)} = -u - 2tu_t - xu_x, W_{(1)} = -2tu_t$, а компоненты сохраняющегося вектора равны
$$C^x_{(0)} = u^2 + xuu_x + 2tuu_t + 2u_x + xu_{xx} + 2tu_{xt},$$
$$C^x_{(1)} = \varepsilon(2tuu_t + u^2 + xuu_x + 2tu_{xt} + 2u_x + xu_{xx}),$$
$$C^t_{(0)} = -(u + 2tu_t + xu_x),$$
$$C^t_{(1)} = -\varepsilon[(u + 2tu_t + xu_x)\cdot(\ln(t)+\gamma) + (u + 2tu_t + xu_x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n\cdot n!}D_t^n u +$$
$$+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n\cdot n!}D_t^n u_x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n\cdot(n+1)!}D_t^{n+1}u.$$
Выделяя в C^x слагаемые с полной производной по t и перенося их в C^t, с учетом уравнения (3) получим координаты сохраняющихся векторов в виде
$$C^x \approx -\varepsilon(u^2 + 2u_x), C^t \approx 2\varepsilon u.$$
Таким образом, закон сохранения для данного оператора совпадает с невозмущенным уравнением (4). Для операторов X_5, X_6 и X_7 получены тривиальные приближенные законы сохранения.

Аналогичным образом получены тривиальные приближенные законы сохранения для операторов X_1, X_2 и X_3 в случае $f(u)$ произвольного вида и степенной функции $f(u)$. Для оператора X_4, допускаемого уравнением (3) при $f(u) = \mathrm{u}^{\mathrm{k}}, \mathrm{k} \neq 0{,}1$, компоненты сохраняющегося вектора определяются выражениями:

при $\mathrm{k} \neq -1$
$$C^x \approx (1-k)\left[\frac{u^{k+1}}{k+1} + u_x\right] + \varepsilon(1-3k)\left[\frac{u^{k+1}}{k+1} + u_x\right],$$
$$C^t \approx (k-1)[u + \varepsilon u(\ln(t)+\gamma)] + \varepsilon u(3k-1) + \varepsilon(1-k)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}t^r}{r\cdot r!}D_t^r u\,;$$
при $\mathrm{k} = -1$
$$C^x \approx 2[\ln u + u_x] + 4\varepsilon[\ln u + u_x],$$

$$C^t \approx -2[u + \varepsilon u(\ln(t) + \gamma)] + 4\varepsilon u + 2\varepsilon \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1} t^r}{r \cdot r!} D_t^r u.$$

Можно показать непосредственными вычислениями, что этот приближенный закон сохранения совпадает с самим уравнением (3). Поскольку $X_5 = \varepsilon X_4$, компоненты сохранящегося вектора для него получаются из вектора для оператора X_4 в виде

$$C^x \approx (1-k)\varepsilon \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} + u_x\right], C^t \approx (k-1)\varepsilon \mathrm{u}, \text{при } k \neq -1;$$

$$C^x \approx 2\varepsilon[\ln u + u_x], C^t \approx -2\varepsilon \mathrm{u}, \text{при } k = -1.$$

и приближенный закон сохранения совпадает с невозмущенным уравнением (4).

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. *Все законы сохранения, найденные методом нелинейной самосопряженности, для нелинейного приближённого уравнения (3) являются тривиальными или совпадают с самим уравнением.*

4. Примеры инвариантных решений

Знание приближенных симметрий уравнения (3) дает возможность строить его приближенные решения. Построим некоторые примеры инвариантных решений приближенного уравнения (3) с функцией $f(u) = u$.

Пример 1. Общий приближенные инвариант для оператора X_1 имеет вид

$$I \approx I_{(0)}(t,u) + \varepsilon I_1(t,u),$$

откуда находим анзац на решение

$$u \approx \varphi_{(0)}(t) + \varepsilon \varphi_{(1)}(t).$$

Подставляя данный анзац в уравнение (3), получаем уравнение на неизвестные функции $\varphi_{(0)}, \varphi_{(1)}$:

$$\varphi'_{(0)} + \varepsilon \varphi'_{(1)} + \varepsilon \left[(\ln(t) + \gamma - 1)\varphi'_{(0)} + \frac{\varphi_{(0)}}{t} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s t^s}{s(s+1)!} D_t^{s+1} \varphi_{(0)}\right] \approx 0.$$

Расщепляя по малому параметру и решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, получаем приближенно инвариантное решение

$$u \approx B_1 + \varepsilon(-B_1 \ln(t) + B_2).$$

где $B_1, B_2 = Const$.

Пример 2. Анзац на инвариантное решение, порожденное оператором X_4, запишется как

$$u \approx \frac{1}{\sqrt{t}} \phi_{(0)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\left(\phi_{(1)}^1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \phi_{(1)}^2\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\ln t\right). \tag{17}$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ инвариантное решение хорошо известно (см., например, [9]):

$$\phi_{(0)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{B_1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}, \tag{18}$$

где $B_1 = Const$, и $\mathrm{erf}(z)$ – функция ошибки. Осталось определить функции $\phi^1_{(1)}, \phi^2_{(1)}$. Однако для уравнения (3), которое содержит бесконечный ряд из производных по переменной t, анзац на решение в виде (17) является весьма сложным для интегрирования. В силу инвариантов перепишем его в виде

$$u \approx \frac{1}{x}\varphi_{(0)}\left(\frac{t}{x^2}\right) + \frac{\varepsilon}{x}\left(\varphi^1_{(1)}\left(\frac{t}{x^2}\right) + \varphi^2_{(1)}\left(\frac{t}{x^2}\right)\ln t\right),$$

где $\varphi_{(0)}$ определяется по формуле (18). Подставляя (19) в уравнение (3), и расщепляя по степеням ε, получаем систему:

$$\varepsilon^0: 4\lambda^2\varphi''_{(0)} - 2\lambda\varphi_{(0)}\varphi'_{(0)} - \varphi'_{(0)} - 2\lambda\varphi'_{(0)} + 2\varphi_{(0)} - \varphi^2_{(0)} = 0, \tag{20}$$

$$\varepsilon\ln t: 4\lambda^2\left(\varphi^2_{(1)}\right)'' - 2\lambda\varphi_{(0)}\left(\varphi^2_{(1)}\right)' - \left(\varphi^2_{(1)}\right)' - 2\lambda\left(\varphi^2_{(1)}\right)' - 2\varphi_{(0)}\varphi^2_{(1)} -$$
$$-2\lambda\varphi'_{(0)}\varphi^2_{(1)} + 2\varphi^2_{(1)} = \varphi'_{(0)}, \tag{21}$$

$$\varepsilon: 4\lambda^2\left(\varphi^1_{(1)}\right)'' - 2\lambda\varphi_{(0)}\left(\varphi^1_{(1)}\right)' - \left(\varphi^1_{(1)}\right)' - 2\lambda\left(\varphi^1_{(1)}\right)' - 2\varphi_{(0)}\varphi^1_{(1)} - 2\lambda\varphi'_{(0)}\varphi^1_{(1)} +$$
$$+2\varphi^1_{(1)} = (\gamma - 1)\varphi'_{(0)} + \frac{\varphi^2_{(1)}}{\lambda} + \frac{\varphi_{(0)}}{\lambda} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s\lambda^s}{s(s+1)!}D_t^{s+1}\varphi_{(0)}, \tag{22}$$

где $\lambda = \frac{t}{x^2}$. Уравнение (20) выполняется тождественно в силу (18), а уравнения (21) и (22) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями на неизвестные функции $\varphi^1_{(1)}, \varphi^2_{(1)}$. К сожалению, построить решение этих уравнений не удалось.

Заключение

В работе исследованы приближенные симметрийные свойства нелинейного приближенного уравнения Бюргерса, полученного из дробно-дифференциального аналога этого уравнения путём разложения дробной производной Римана–Лиувилля в ряд по малому параметру, выделенному из порядка дробного дифференцирования. Установлено, что в случае произвольного вида функции, стоящей при первой производной по пространственной переменой, допускаемая приближенная группа точечных преобразований для исследуемого уравнения является трёхпараметрической. В случаях, когда эта функция является степенной или линейной, группа расширяется до пяти- и семипараметрической, соответственно.

Доказано, что рассматриваемое уравнение является приближенно нелинейно самосопряженным, что дает возможность строить его приближенные законы сохранения. Показано, однако, что приближенные законы сохранения для данного уравнения являются либо тривиальными, либо имеют вид исходного уравнения. Также построены примеры инвариантных приближенных решений для некоторых допускаемых операторов.

Список литературы

1. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. 1948. Vol. 1. Pp. 171–199. DOI: 10.1016/s0065-2156(08)70100-5

2. Su C.H., Gardner C.S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation // J. of Mathematical Physics. 1969. Vol. 10. No. 3. Pp. 536–538. DOI: 10.1063/1.1664873
3. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с. [Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. N.Y.: Wiley, [1974]. 636 p.].
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн: учеб. пособие. М.: Наука, 1979. 383 с.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amst.; Boston: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
7. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. Vol. 368. No. 2. Pp. 399–415. DOI: 10.1016/j.physa.2005.12.015
8. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. Vol. 387. No. 8–9. Pp. 1807–1817. DOI: 10.1016/j.physa.2007.11.046
9. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования: учебник: пер. с англ.. 2-е изд. М.: Физматлит, 2012. 332 с. [Ibragimov N.Kh. A practical course in differential equations and mathematical modelling: a textbook. [Hackensack]: World Scientific; Beijing: Higher Education Press, 2010. 348 p.].
10. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N.Kh. Ibragimov. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Raton: CRC Press, 1994. 442 p.
11. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник Уфимского гос. авиацион. техн. ун-та (УГАТУ). 2007. Т. 9. № 3(21). С. 125–135. Режим доступа: http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/2347 (дата обращения 9.01.2020).
12. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations // Physica Scripta. 2009. Vol. T136. 014016 (5 p.). DOI: 10.1088/0031-8949/2009/T136/014016
13. Лукащук С.Ю. Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 603–619. DOI: 10.14498/vsgtu1520
14. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.
15. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Новые достижения. 1989. Т. 34. С. 85–147.

16. Ibragimov N. Kh. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA. 2010-2011. Vol. 7/8. Pp. 1–99.
17. Lukashchuk S.Yu. Approximate conservation laws for fractional differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 68. Pp. 147–159. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.011

Mathematics and Mathematical Modeling, 2019.
no. 05. pp. 1 – 14
DOI: 10.24108/mathm.0519.0000197

© V.O. Lukashchuk, L.O. Gavryushina

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Approximate Symmetries and Conservation Laws of Fractional Differential Generalization of the Burgers Equation

V.O. Lukashchuk[1,*], L.O. Gavryushina[1]

[1]Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

[*]voluks@gmail.com

Keywords: fractional differential generalization of the Burgers equation, approximate symmetries, approximate conservation laws

Received: 04.09.2019, Revised: 19.09.2019

The classical Burgers equation is well studied and is often used in problems of hydrodynamics and nonlinear acoustics. In recent years, there has been a significantly increasing interest in mathematical models that take into account the power-law memory effect of the medium. Such models are described by equations in which the time derivative is replaced by a fractional derivative.

The study object is a generalized Burgers equation with a fractional Riemann-Liouville time derivative. A memory effect of the medium is assumed to be small, so a small parameter, with respect to which the fractional derivative is expanded into a series, is extracted from the fractional-order differentiation. As a result, the initial fractional differential generalization of the Burgers equation is approximated by an equation with a small parameter. The aim of the work is to study the symmetry properties of such a partial differential equation with a small parameter and to construct conservation laws for it. To achieve the goal, methods of modern group analysis are used, as well as widely known methods of integrating systems and partial differential equations of first order.

The group classification of the equation under study is carried out according to the function standing at the first derivative with respect to the spatial variable. It is shown that if this function is of arbitrary form, then the admissible approximate group of point transformations is three-parameter. For power-law and linear functions, the admissible approximate group of point transformations extends to five- and seven-parameter groups, respectively. Examples of approximately invariant solutions for some admissible operators are constructed. It is proved that the studied equation with a small parameter is approximately nonlinearly self-adjoint. Based on the principle

of nonlinear self-adjointness, conservation laws are constructed for each group generator. It is shown that all conservation laws are either trivial or have the form of the original equation.

The results develop the theory of approximate transformation groups for fractional differential equations. The obtained symmetries can be used to construct approximate invariant solutions of the equation in question.

References

1. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1948, vol. 1, pp. 171–199. DOI: 10.1016/s0065-2156(08)70100-5
2. Su C.H., Gardner C.S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation. *J. of Mathematical Physics*, 1969, vol. 10, no. 3, pp. 536–538. DOI: 10.1063/1.1664873
3. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*. N.Y.: Wiley, [1974]. 636 p. (Russ. ed.: Whitham G.B. *Linejnye i nelinejnye volny*. Moscow: Mir Publ., 1977. 622 p.).
4. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. *Teoriia voln* [Wave theory]: a textbook. Moscow: Nauka Publ., 1979. 383 p. (in Russian).
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amst.; Boston: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Uchajkin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [The fractional derivative method]. Ul'ianovsk: Artishoke Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
7. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, vol. 368, no. 2, pp. 399–415. DOI: 10.1016/j.physa.2005.12.015
8. Tofighi A., Golestani A. A perturbative study of fractional relaxation phenomena. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, vol. 387, no. 8–9, pp. 1807–1817. DOI: 10.1016/j.physa.2007.11.046
9. Ibragimov N.Kh. *A practical course in differential equations and mathematical modelling:* a textbook. [Hackensack]: World Scientific; Beijing: Higher Education Press, 2010. 348 p.]. (Russ. ed.: Ibragimov N.Kh. *Prakticheskij kurs differentsial'nykh uravnenij i matematicheskogo modelirovaniia*: uchebnik. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit Publ., 2012. 332 p.).
10. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N.Kh. Ibragimov. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Raton: CRC Press, 1994. 442 p.
11. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S.Yu. Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta (UGATU)* [Vestnik USATU], 2007, vol. 9, no. 3(21), pp. 125–135. Available at: http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/2347, accessed 9.01.2020 (in Russian).

12. Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Physica Scripta*, 2009, vol. T136, 014016 (5 p.) DOI: 10.1088/0031-8949/2009/T136/014016
13. Lukashchuk S.Yu. An approximate group classification of a perturbed subdiffusion equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki* [J. of Samara State Technical Univ. Ser. Physical & Mathematical Sciences], 2016, vol. 20, no 4, pp. 603-619. DOI: 10.14498/vsgtu1520 (in Russian)
14. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Phil.: Gordon & Breach Science Publ., 1993. 976 p.
15. Baikov V. A., Gazizov R. K., Ibragimov N. Kh. Perturbation methods in group analysis. *J. of Soviet Mathematics*, 1991, vol. 55, no 1, pp. 1450–1490. DOI: 10.1007/BF01097534
16. Ibragimov N.Kh. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws. *Archives of ALGA*, 2010-2011, vol. 7/8, pp. 1–99.
17. Lukashchuk S.Yu. Approximate conservation laws for fractional differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 68, pp.147–159. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.011